

POLITECNICO DI MILANO



MECCANICA DEI FLUIDI

4. DINAMICA DEI FLUIDI

A cura di: DIEGO BERZI

v1.2

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Bilancio di massa | 3 |
| 1.1 | Forma indefinita | 3 |
| 1.2 | Forma globale | 5 |
| 1.3 | Correnti | 6 |
| 2 | Bilancio di quantità di moto | 9 |
| 2.1 | Forma indefinita | 9 |
| 2.2 | Forma globale | 12 |
| 3 | Bilancio di momento della quantità di moto | 14 |

1 Bilancio di massa

Il bilancio di massa esprime il principio di conservazione della massa. Essendo la massa una quantità scalare, vedremo che tale bilancio si ridurrà ad una equazione scalare detta **equazione di continuità**. L'equazione di continuità può essere espressa in forma indefinita (nella quale compaiono quantità locali) o globale. A sua volta la forma indefinita può essere espressa usando un punto di vista Lagrangiano o Euleriano. Un caso particolare di equazione di continuità può essere ricavato per le **correnti**, definite, genericamente, come un fascio di linee di corrente tra di loro quasi-parallele. Ci limiteremo qui ad analizzare il caso di fluidi non reattivi, cioè fluidi che non subiscono reazioni chimiche e/o nucleari.

1.1 Forma indefinita

Il bilancio di massa per una particella di fluido non reattivo afferma, semplicemente, che la sua massa m si deve conservare, cioè che la sua derivata sostanziale nel tempo deve essere pari a zero. In termini matematici,

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (1)$$

La massa è pari al prodotto di densità ρ e volume W per cui l'Eq.(1) diventa,

$$\frac{d(\rho W)}{dt} = \rho \frac{dW}{dt} + W \frac{d\rho}{dt} = 0. \quad (2)$$

Dividendo tutto per il volume, e ricordando che la variazione percentuale di volume nel tempo è pari alla divergenza del vettore velocità (Cap. 3, Par. 2.2),

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0. \quad (3)$$

L'Eq.(3) rappresenta l'equazione di continuità in forma **indefinita Lagrangiana**.

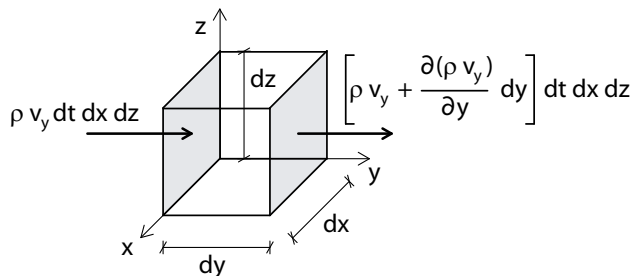


Figura 1: volume di controllo infinitesimo per la derivazione del bilancio di massa in forma Euleriana.

Prendiamo ora in considerazione un parallelepipedo infinitesimo fisso nello spazio, avente lati dx , dy e dz , e facce parallele a due a due con gli assi del sistema di riferimento, attraversato da particelle di fluido (Fig. 1). Il principio di conservazione della massa applicato a tale volume afferma, semplicemente, che la massa entrata in un certo intervallo di tempo meno quella uscita deve essere pari alla massa accumulata. Consideriamo ora le due facce del parallelepipedo aventi per normale un versore parallelo a quello dell'asse y . Le particelle che nell'intervallo di tempo infinitesimo dt attraversano la faccia che ha per normale il versore concorde con $\hat{\mathbf{j}}$ sono solo quelle che si trovano a una distanza pari a $v_y dt$ da essa (le altre componenti di velocità sono tangenti alla superficie e non contribuiscono al flusso di massa attraverso essa), cioè che si trovano nel volume $v_y dt dx dz$. La massa entrata attraverso quella superficie nell'intervallo di tempo dt risulta, dunque, $\rho v_y dt dx dz$. La massa che, nell'intervallo di tempo dt , attraversa la superficie che ha come normale il versore discorde con $\hat{\mathbf{j}}$ è pari a

$$\rho v_y dt dx dz + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dy dt dx dz, \quad (4)$$

con il consueto uso della Meccanica del Continuo (espansione in serie arretrata al primo ordine). Tale massa deve intendersi come uscita dal volume, per cui, complessivamente, la massa netta entrata nel volume nell'intervallo di tempo dt attraverso le facce normali all'asse y risulta

$$\rho v_y dt dx dz - \left[\rho v_y dt dx dz + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dy dt dx dz \right] = - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz dt. \quad (5)$$

Procedendo in maniera analoga per le facce normali all'asse x e all'asse z , si determina che la massa netta complessivamente entrata nel volume nell'intervallo di tempo dt attraverso la sua superficie di contorno è pari a

$$- \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dx dy dz dt = - \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) dx dy dz dt. \quad (6)$$

Tale massa netta entrata deve eguagliare la massa accumulata nel volume nello stesso intervallo di tempo. La massa accumulata si calcola come massa contenuta nel volume dopo un intervallo di tempo dt meno quella inizialmente contenuta nello stesso volume. La massa iniziale è pari al prodotto della densità per il volume infinitesimo, $\rho dx dy dz$; quella finale si ottiene applicando ancora la Meccanica del Continuo (con un'espansione in serie nella variabile temporale invece che in quelle spaziali). La massa accumulata nell'intervallo di tempo dt è, dunque, pari a

$$\rho dx dy dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz - \rho dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz. \quad (7)$$

Equagliando l'Eq.(6) e l'Eq.(7) e dividendo tutto per $dt dx dy dz$ si ottiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad (8)$$

che rappresenta l'equazione di continuità in forma **indefinita Euleriana conservativa**. Ricordiamo che un'equazione differenziale si dice in forma conservativa (o divergente) se i coefficienti che compaiono davanti alle derivate sono costanti. Le forme conservative sono da preferirsi nel caso in cui si debbano integrare numericamente le equazioni differenziali, per ridurre il rischio di instabilità e oscillazioni numeriche (artificiali, non fisiche) nelle soluzioni.

L'Eq.(3) e l'Eq.(8) sono del tutto equivalenti, e si può sempre passare da una forma all'altra utilizzando la regola di derivazione Euleriana (Cap. 3, Par. 1.3),

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) \quad (9)$$

Nel caso di fluidi incomprimibili ($\rho = \text{cost}$), l'equazione di continuità in forma indefinita (sia Euleriana che Lagrangiana) si riduce semplicemente a

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (10)$$

e il moto è detto isocoro (Cap. 3, Par. 2.2).

1.2 Forma globale

L'equazione di continuità in forma globale si ottiene integrando l'Eq.(8) su un volume di controllo finito W costante nel tempo e fisso nello spazio,

$$\int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) \right] dW = 0. \quad (11)$$

Applicando la proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla somma,

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW + \int_W \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) dW = 0. \quad (12)$$

dove il primo termine a sinistra dell'uguale rappresenta il termine di accumulo. Il secondo termine può essere convenientemente riscritto, usando il teorema della divergenza, come

$$\int_W \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) dW = \int_W \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} dW = - \int_A \rho v_j n_j dA = - \int_A \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA, \quad (13)$$

dove A è la superficie di contorno del volume W . Suddividiamo ora la superficie di contorno in due porzioni: una, che denominiamo A_e , per la quale il prodotto scalare tra $\bar{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ è positivo (la massa sta entrando nel volume); una, denominata A_u , per la quale il prodotto scalare tra $\bar{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ è negativo (la massa sta uscendo dal volume). L'Eq.(11) si può, allora, scrivere come

$$\frac{\partial (\int_W \rho dW)}{\partial t} = M_e - M_u, \quad (14)$$

usando la regola di Leibniz [1]: l'integrale di una derivata è uguale alla derivata dell'integrale se il dominio di integrazione non dipende dalla variabile di derivazione (come in questo caso, dove il volume W è costante nel tempo). La quantità $M_e = \int_{A_e} \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ rappresenta il **flusso di massa**, detto anche **portata massica**, entrante nel volume, mentre $M_u = - \int_{A_u} \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ rappresenta il flusso di massa uscente.

Se il fluido è incomprimibile, l'Eq.(14) diventa, semplicemente,

$$Q_e = Q_u, \quad (15)$$

dove $Q_e = \int_{A_e} \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ e $Q_u = - \int_{A_u} \bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$ rappresentano, rispettivamente, la **portata volumetrica** entrante e uscente.

1.3 Correnti

Come già detto, le correnti sono un insieme di linee di corrente quasi-parallele tra di loro. Se intersechiamo la corrente con un generico piano otteniamo una sezione piana della corrente stessa. Nel punto di intersezione tra tale sezione e la singola linea di corrente possiamo distinguere tra componente normale e tangenziale alla sezione del vettore velocità in quel punto. Si può, allora, ottenere la media areale sulla sezione delle componenti di velocità normali e tangenziali. Se la velocità media tangenziale è pari a zero, la sezione si dice **trasversale** al flusso. Il luogo dei punti costituiti dai baricentri delle infinite sezioni trasversali è l'**asse** della corrente. Lungo l'asse si definisce un'ascissa curvilinea s che individua la direzione del flusso (Fig. 2). La dimensionalità

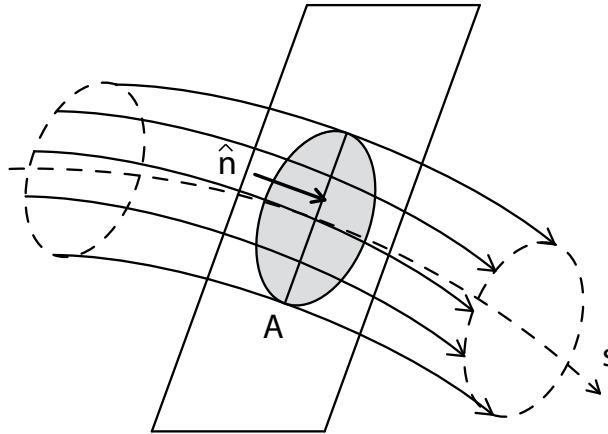


Figura 2: corrente e area trasversale.

spaziale del problema, nel caso delle correnti, può essere ridotta calcolando, per qualsiasi grandezza di interesse, la media areale sulla sezione trasversale e assegnando tale valore (istantaneo) alla coordinata s di quella particolare sezione. Il moto si riduce, allora, a mono-dimensionale (ogni grandezza può

variare nel tempo e lungo la coordinata spaziale s), con non trascurabili benefici dal punto di vista concettuale e computazionale.

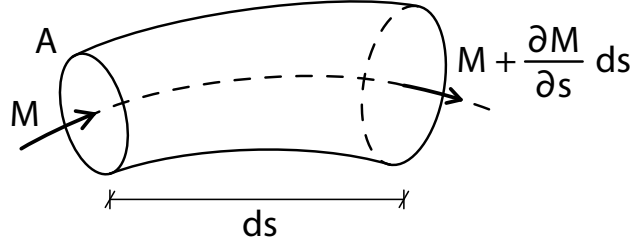


Figura 3: tronco di corrente di lunghezza infinitesima.

Prendiamo un tronco di corrente di lunghezza infinitesima ds compreso tra due sezioni trasversali (Fig. 3). Essendo la corrente definita come un fascio di linee di corrente, in ogni istante la massa può entrare o uscire solo attraverso le sezioni trasversali. Chiamiamo A la superficie della sezione trasversale con normale concorde al vettore velocità media. Attraverso tale sezione entra la portata massica M . Sfruttando la Meccanica del Continuo, calcoliamo la portata massica che esce attraverso la sezione trasversale posta a distanza ds dalla prima come,

$$M + \frac{\partial M}{\partial s} ds. \quad (16)$$

Complessivamente, la massa netta entrata nell'intervallo di tempo dt attraverso il contorno del tronco di corrente risulta

$$M dt - \left(M + \frac{\partial M}{\partial s} ds \right) dt = -\frac{\partial M}{\partial s} ds dt. \quad (17)$$

Al solito, la massa netta entrata deve eguagliare la massa accumulata nello stesso intervallo di tempo. Calcoliamo il termine di accumulo come differenza tra massa contenuta nel tronco di corrente dopo l'intervallo di tempo dt e quella iniziale. La massa iniziale è pari a $\rho A ds$, mentre quella finale, sempre sfruttando la Meccanica del Continuo ed espandendo in serie nella variabile temporale, risulta

$$\rho A ds + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dt ds. \quad (18)$$

Sottraendo all'Eq.(18) la massa iniziale, equagliando il risultato all'Eq.(17) e dividendo tutto per $ds dt$, otteniamo

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial s} = 0, \quad (19)$$

che rappresenta l'equazione di continuità delle correnti (si applica, ad esempio, nella **Gasdinamica**).

In condizioni di moto stazionario, l'Eq.(19) si riduce a

$$\frac{\partial M}{\partial s} = 0, \quad (20)$$

che afferma che la portata massica rimane costante lungo s .

Se il fluido è incomprimibile, l'Eq.(19) diventa

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0, \quad (21)$$

dove Q è la portata volumetrica. In condizioni di moto stazionario oppure nel caso in cui la sezione A sia rigida (come nel caso del moto di fluidi incomprimibili all'interno di condotte), l'Eq.(21) si riduce a

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0, \quad (22)$$

che afferma che la portata volumetrica è costante lungo s .

2 Bilancio di quantità di moto

L'equazione di continuità da sola non è sufficiente a determinare una soluzione al moto dei fluidi. Rappresenta, infatti, una equazione scalare nelle quattro incognite costituite dalla densità e dalle tre componenti della velocità. Ad essa devono, dunque, essere affiancate altre equazioni di bilancio. Nel seguito, analizziamo il bilancio della quantità di moto dei fluidi, in forma indefinita e globale, che non è altro che la seconda legge della dinamica o seconda legge di Newton. Essendo la quantità di moto un vettore, il bilancio di quantità di moto è un'equazione vettoriale che corrisponde a tre equazioni scalari.

2.1 Forma indefinita

Prendiamo il solito volume infinitesimo di fluido dW , costituito da un parallelepipedo di lati dx , dy e dz , aventi le facce parallele a due a due agli assi del nostro sistema di riferimento cartesiano (Fig. 4). Per esso, la secon-

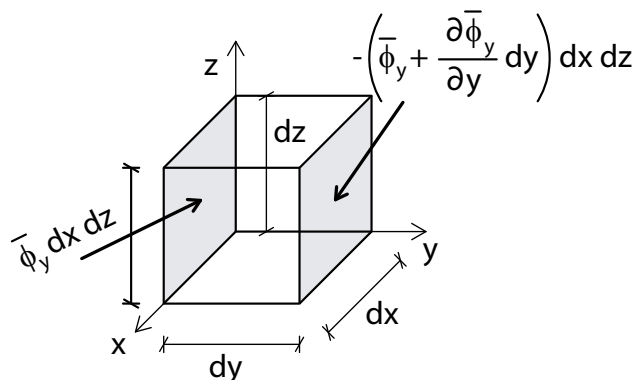


Figura 4: volume di controllo infinitesimo per la derivazione del bilancio di quantità di moto.

da legge della dinamica afferma che la somma delle forze esterne agenti sul volume deve eguagliare la forza di inerzia. Distinguendo, come al solito, le forze esterne in forze di superficie $\bar{\mathbf{F}}_s$ e di volume, si può, dunque, scrivere che

$$\sum \bar{\mathbf{F}}_s + \rho \bar{\mathbf{f}} dW = \rho \bar{\mathbf{a}} dW, \quad (23)$$

dove, al solito, $\bar{\mathbf{f}}$ è la forza di volume per unità di massa e $\bar{\mathbf{a}}$ è l'accelerazione. Per esprimere le forze di superficie utilizziamo la nozione di sforzo. A differenza del caso statico, gli sforzi possono avere sia componente normale che tangenziale alla superficie. Distinguiamo le tre facce che hanno per normali i versori $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ degli assi cartesiani dalle tre facce parallele alle prime, e distanti da queste dx , dy e dz , aventi per normali i versori opposti $-\hat{\mathbf{i}}$, $-\hat{\mathbf{j}}$ e

$-\hat{\mathbf{k}}$. Sulle tre facce che hanno come normali $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$, gli sforzi sono rappresentati dai vettori $\bar{\phi}_x$, $\bar{\phi}_y$ e $\bar{\phi}_z$. Sulle tre facce che hanno come normali $-\hat{\mathbf{i}}$, $-\hat{\mathbf{j}}$ e $-\hat{\mathbf{k}}$, lo sforzo si determina mediante un'espansione in serie di Taylor troncata al primo ordine. Ad esempio, per quanto riguarda la superficie infinitesima che ha per normale $-\hat{\mathbf{j}}$, lo sforzo è pari a $-\left(\bar{\phi}_y + \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial y} dy\right)$, dove il segno meno tiene conto del fatto che la normale è discorde con il versore dell'asse y . Moltiplicando lo sforzo per la superficie si ottiene il vettore forza che agisce su quella superficie. L'Eq.(23) diventa, dunque,

$$\begin{aligned} & \bar{\phi}_x dydz - \left(\bar{\phi}_x + \frac{\partial \bar{\phi}_x}{\partial x} dx\right) dydz + \\ & \bar{\phi}_y dx dz - \left(\bar{\phi}_y + \frac{\partial \bar{\phi}_y}{\partial y} dy\right) dx dz + \\ & \bar{\phi}_z dx dy - \left(\bar{\phi}_z + \frac{\partial \bar{\phi}_z}{\partial z} dz\right) dx dy = -\rho(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{a}})dW. \end{aligned} \quad (24)$$

Semplificando, con $dW = dx dy dz$, l'Eq.(24) risulta

$$\rho(\bar{\mathbf{f}} - \bar{\mathbf{a}}) = \nabla \cdot \bar{\bar{\Phi}}, \quad (25)$$

dove $\nabla \cdot \bar{\bar{\Phi}} = \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x_j}$ è la divergenza del tensore degli sforzi. L'Eq.(25) è l'equazione indefinita di bilancio di quantità di moto per qualsiasi sostanza (non necessariamente un fluido). Sarà il legame costitutivo tra il tensore degli sforzi e le deformazioni (**reologia**) a specificare il tipo di sostanza cui siamo interessati.

A seconda di come esprimiamo l'accelerazione, possiamo ottenere la forma Euleriana o Lagrangiana dell'equazione di bilancio della quantità di moto (Cap. 3, Par. 1.3). Nel caso in cui l'unica forza di volume sia la forza peso ($\bar{\mathbf{f}} = -g\nabla\tilde{z}$), il bilancio di quantità di moto risulta

$$\rho \frac{d^2 x_i}{dt^2} \hat{\mathbf{i}}_i + \rho(2\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{v}}) + \rho\bar{\boldsymbol{\omega}} \times (\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{x}}) = -\rho g \nabla\tilde{z} - \nabla \cdot \bar{\bar{\Phi}}. \quad (26)$$

dove si è ipotizzato che il sistema di riferimento relativo sia in rotazione a velocità angolare costante rispetto ad uno assoluto, come è il caso di un fluido soggetto alla rotazione terrestre rispetto al sistema delle stelle fisse (Cap. 3, Par. 1.2). Il secondo e il terzo termine a sinistra dell'uguale nell'Eq.(26) rappresentano, rispettivamente, la **Forza di Coriolis** e la **Forza Centripeta** per unità di volume (forze apparenti). Il vettore velocità $\bar{\mathbf{v}}$ e il vettore posizione $\bar{\mathbf{x}}$ nell'Eq.(26) si intendono valutati nel sistema di riferimento in moto relativo. Se supponiamo che il fluido si trovi sulla superficie terrestre, la forza centripeta è un vettore perpendicolare all'asse di rotazione terrestre e diretto verso l'asse stesso. Si è soliti portare la forza

centripeta a destra dell'uguale nell'Eq.(26) e sommarla alla forza peso. Il vettore $-g\nabla\tilde{z} - \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{x})$, detto **accelerazione efficace di gravità**, non è diretto radialmente rispetto alla Terra. Il suo modulo è massimo ai poli (dove coincide con g) e minimo all'equatore (dove è pari a $g - \omega^2\mathfrak{R}$, con \mathfrak{R} raggio della Terra). Per la Terra $\omega \approx 7.3 \times 10^{-5}$ Hz (1 giro ogni 24 ore) e $\mathfrak{R} \approx 6.4 \times 10^6$ m; la correzione $\omega^2\mathfrak{R}$ all'equatore risulta dell'ordine di 10^{-2} m/s², per cui trascurabile nelle normali applicazioni. Anche la forza di Coriolis risulta trascurabile rispetto, per esempio, al primo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(26), a meno che il volume di fluido di interesse non abbia un'estensione geometrica dell'ordine del km. Questa affermazione verrà dimostrata in seguito, quando ci occuperemo del bilancio di quantità di moto per fluidi reali. Esclusi i casi di correnti oceaniche e atmosferiche alla scala continentale, dunque, la forma **indefinita Lagrangiana** del bilancio di quantità di moto risulta, semplicemente,

$$\rho \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \cdot \bar{\Phi}. \quad (27)$$

Usando la regola di derivazione Euleriana, l'Eq.(27) si può scrivere come

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \cdot \bar{\Phi}, \quad (28)$$

che rappresenta la forma **indefinita Euleriana non-conservativa** del bilancio di quantità di moto. Il primo termine a sinistra dell'uguale nell'Eq.(28) rappresenta l'**inerzia locale**, mentre il secondo termine rappresenta l'**inerzia convettiva**.

Per ottenere la forma conservativa del bilancio di quantità di moto basta aggiungere un termine a primo membro nell'Eq.(28):

$$\rho \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \rho \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}}) \right] = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \cdot \bar{\Phi}. \quad (29)$$

Il termine tra parentesi quadre è quello che compare nell'Eq.(8) (continuità) ed è sempre nullo, per cui l'Eq.(29) effettivamente coincide con l'Eq.(28). Usando la notazione alla Einstein e sfruttando le proprietà della derivata del prodotto di due funzioni, riscriviamo i termini a primo membro dell'Eq.(29) come

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \hat{\mathbf{i}}_i + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \hat{\mathbf{i}}_i + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \hat{\mathbf{i}}_i + v_i \frac{\partial (\rho v_j)}{\partial x_j} \hat{\mathbf{i}}_i = \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} \hat{\mathbf{i}}_i + \frac{\partial (\rho v_j v_i)}{\partial x_j} \hat{\mathbf{i}}_i. \quad (30)$$

Con questo, l'Eq.(29) diventa, in forma vettoriale,

$$\frac{\partial (\rho \bar{\mathbf{v}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}) = -\rho g \nabla \tilde{z} - \nabla \cdot \bar{\Phi}, \quad (31)$$

dove $\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}$ è il prodotto tensoriale del vettore velocità con sé stesso (Cap. 1, Par. 1.2). L'Eq.(31) rappresenta l'equazione di bilancio di quantità di moto in forma **indefinita Euleriana conservativa**.

2.2 Forma globale

Come al solito, la forma globale si può ottenere integrando l'equazione indefinita su di un volume W finito costante nel tempo e fisso nello spazio. Sfruttando la proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla somma, la forma globale dell'Eq.(31) si può scrivere come

$$-\int_W \frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} dW - \int_W \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}) dW - \int_W \rho g \nabla \bar{z} dW - \int_W \nabla \cdot \bar{\Phi} dW = \bar{\mathbf{0}}. \quad (32)$$

Il primo termine a sinistra dell'uguale nell'Eq.(32) risulta

$$\bar{\mathbf{I}} = - \int_W \frac{\partial(\rho\bar{\mathbf{v}})}{\partial t} dW = - \frac{\partial (\int_W \rho\bar{\mathbf{v}} dW)}{\partial t}, \quad (33)$$

usando ancora una volta la regola di Leibniz [1] di inversione tra le operazioni di derivazione e di integrazione; $\bar{\mathbf{I}}$ rappresenta la variazione nel tempo della quantità di moto del volume W (inerzia associata con la non-stazionarietà del moto). Il secondo termine diventa, con il teorema della divergenza,

$$-\int_W \nabla \cdot (\rho\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}) dW = - \int_W \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} \hat{\mathbf{i}}_i dW = \int_A \rho v_j n_j v_i \hat{\mathbf{i}}_i dA = \int_A \rho (\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{v}} dA, \quad (34)$$

dove A è la superficie di contorno del volume W . Introduciamo, dunque, il **flusso di quantità di moto**,

$$\bar{\mathbf{M}} = \int_A \rho (\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{v}} dA, \quad (35)$$

che ha la sua origine nell'inerzia convettiva. Vale la pena notare che il flusso di quantità di moto è un vettore che è sempre entrante nel volume: per le porzioni di superficie in cui $\bar{\mathbf{v}}$ è concorde con $\hat{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ è positivo e $\bar{\mathbf{M}}$ è concorde con $\bar{\mathbf{v}}$ (dunque entrante nel volume); per le porzioni di superficie in cui $\bar{\mathbf{v}}$ è discorde con $\hat{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ è negativo e $\bar{\mathbf{M}}$ è discorde con $\bar{\mathbf{v}}$ (dunque ancora entrante nel volume). Il terzo termine a sinistra dell'uguale nell'Eq.(32) era già stato introdotto analizzando il caso statico (Cap. 2, Par. 1.3),

$$\bar{\mathbf{G}} = - \int_W \rho g \nabla \bar{z} dW = - \left(\int_W \rho dW \right) g \nabla \bar{z}, \quad (36)$$

e rappresenta il peso del fluido contenuto in W . Il quarto e ultimo termine a sinistra dell'uguale nell'Eq.(32) si può scrivere, usando ancora una volta il teorema della divergenza, come

$$-\int_W \nabla \cdot \bar{\Phi} dW = - \int_W \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial x_j} dW = \int_A \bar{\phi}_j n_j dA. \quad (37)$$

L'analisi del tetraedro di Cauchy (Cap. 2, Par. 1.1) mostra che, in prima approssimazione,

$$\bar{\phi}_j n_j dA = \bar{\phi}_n dA, \quad (38)$$

per cui possiamo definire

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \int_A \bar{\phi}_n dA \quad (39)$$

come la risultante degli sforzi sulla superficie di contorno del volume W . In definitiva, l'equazione di bilancio della quantità di moto in **forma globale** risulta

$$\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{G}} + \bar{\mathbf{\Pi}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (40)$$

3 Bilancio di momento della quantità di moto

A questo punto abbiamo ricavato 1 equazione scalare di continuità e 3 equazioni scalari di bilancio di quantità di moto. Le incognite del problema sono la densità (1), le componenti del vettore velocità (3) e le componenti del tensore degli sforzi (9). Chiaramente il problema non è chiuso: abbiamo più incognite che equazioni. Possiamo pensare di aggiungere l'equazione di stato, cioè il legame tra densità, pressione e temperatura che sussiste per la particolare sostanza che stiamo considerando. Anche ipotizzando di trascurare le variazioni di temperatura, come è il caso di buona parte delle applicazioni nella fluidodinamica ambientale (diverso è il caso in cui il fluido venga usato, per esempio, in ambito industriale nei circuiti di raffreddamento), questo introduce un'incognita ulteriore, la pressione, per cui il numero delle informazioni mancanti per chiudere il problema rimane inalterato. Tale numero (9) corrisponde, non a caso, al numero degli elementi del tensore degli sforzi: dobbiamo introdurre quelli che vengono chiamati **legami costitutivi** o **equazioni reologiche**, cioè quelle relazioni che intercorrono tra gli elementi del tensore degli sforzi e le deformazioni subite dal fluido. In realtà, possiamo ridurre il numero dei legami costitutivi da introdurre applicando una variante della seconda legge della dinamica, che afferma che, per un qualsiasi sistema fisico, la somma dei momenti delle forze esterne rispetto ad un polo deve eguagliare il momento della forza di inerzia rispetto allo stesso polo (bilancio di momento della quantità di moto).

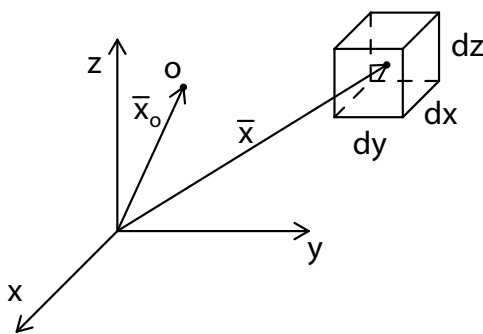


Figura 5: volume di controllo infinitesimo per la derivazione del bilancio di momento della quantità di moto.

Prendiamo il solito volume infinitesimo di fluido dW , costituito da un parallelepipedo di lati dx , dy e dz , aventi le facce parallele a due a due agli assi del nostro sistema di riferimento cartesiano (Fig. 5), e caratterizzato dal vettore posizione \bar{x} rispetto all'origine del sistema di riferimento cartesiano. Prendiamo ora un polo O il cui vettore posizione sia \bar{x}_o . Il momento della forza di inerzia rispetto al polo O vale

$$(\bar{x} - \bar{x}_o) \times \rho \bar{a} dW, \quad (41)$$

mentre quello della forza di volume risulta

$$(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \rho \bar{\mathbf{f}} dW, \quad (42)$$

Per quanto riguarda i momenti delle forze di superficie, distinguiamo, al solito, le tre facce che hanno per normali i versori $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ degli assi cartesiani dalle tre facce parallele alle prime, e distanti da queste dx , dy e dz , aventi per normali i versori opposti $-\hat{\mathbf{i}}$, $-\hat{\mathbf{j}}$ e $-\hat{\mathbf{k}}$. I momenti degli sforzi che agiscono sulle tre facce che hanno come normali $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$, sono pari a $(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_x$, $(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_y$ e $(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_z$. I momenti degli sforzi che agiscono sulle tre facce che hanno come normali $-\hat{\mathbf{i}}$, $-\hat{\mathbf{j}}$ e $-\hat{\mathbf{k}}$ si determinano, ancora una volta, mediante un'espansione in serie di Taylor troncata al primo ordine. Ad esempio, per quanto riguarda la superficie infinitesima che ha per normale $-\hat{\mathbf{j}}$, il momento risulta $-\left\{ (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_y + \frac{\partial[(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_y]}{\partial y} dy \right\}$, dove il segno meno tiene conto del fatto che la normale è discorde con il versore dell'asse y . Moltiplicando per le rispettive superfici, e sommando i vari contributi, con le ovvie semplificazioni, otteniamo

$$-\frac{\partial[(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_j]}{\partial x_j} dW. \quad (43)$$

Il bilancio del momento della quantità di moto risulta, dunque,

$$-\frac{\partial[(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_j]}{\partial x_j} + (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \rho \bar{\mathbf{f}} = (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \rho \bar{\mathbf{a}}. \quad (44)$$

Sviluppando il primo termine a sinistra dell'uguale nell'Eq.(44) con la regola di derivazione del prodotto di due funzioni, e sfruttando la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma,

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o)}{\partial x_j} \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_j = (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o) \times \left(\rho \bar{\mathbf{f}} - \rho \bar{\mathbf{a}} - \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\phi}}_j}{\partial x_j} \right). \quad (45)$$

Il termine a destra dell'uguale nell'Eq.(45) è nullo per via del bilancio di quantità di moto rappresentato dall'Eq.(25). L'Eq.(45) diventa

$$\frac{\partial(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_o)}{\partial x_j} \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_j = \frac{\partial(x_i - x_{oi})}{\partial x_j} \hat{\mathbf{i}}_i \times \bar{\boldsymbol{\phi}}_j = \hat{\mathbf{i}}_j \times \phi_{jk} \hat{\mathbf{i}}_k = \bar{\mathbf{0}}. \quad (46)$$

Dato che $\hat{\mathbf{i}}_j \times \hat{\mathbf{i}}_k = -\hat{\mathbf{i}}_k \times \hat{\mathbf{i}}_j$, segue immediatamente che $\phi_{kj} = \phi_{jk}$, cioè che il tensore degli sforzi è **simmetrico**. Delle 9 componenti del tensore, solo 6 risultano effettivamente indipendenti tra di loro, per cui 6 sarà il numero di legami costitutivi da introdurre per chiudere il problema e potere sperare di risolvere il moto dei fluidi.

Riferimenti bibliografici

- [1] Flanders, H., *Differentiation Under the Integral Sign*, The American Mathematical Monthly, 80, 615-627 (1973).